COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 24 GIUGNO 2008

PROF. SUSANNA TERRACINI

1) (a) Si definiscano gli insiemi elementari e la loro misura m', a partire da quella dei rettangoli.
(b) Sia $E \subset \mathbf{R}^d$ un rettangolo d-dimensionale. Dimostrare che, per ogni insieme elementare $A \subset E$, e per ogni successione di insiemi elementari $\{A_n\}$ contenuti in E tali che

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ ,$$

si ha

$$m'(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n).$$

(c) Dimostrare che, se gli A_n sono a due a due disgiunti e se $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, allora $m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n)$..

2) Scrivere la definizione di funzione misurabile. Dimostrare che il limite puntuale di una successione di funzioni misurabili è misurabile.

3) (a) Scrivere la definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue.
(b) Sia $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ ;$$

stabilire se è una funzione integrabile secondo Lebesgue.

4) (a) Determinare per quali valori del parametro $p \in \mathbf{R}$ la funzione

$$\frac{\sin x}{x^p}$$

è integrabile secondo Lebesgue in $(0, \pi)$.
(b) Studiare la continuità e la differenziabilità rispetto al parametro p della funzione

$$\Phi(p) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^p} \, dx \ .$$

5) Sia $\mathbf{F}$ il campo definito da:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|^3}$$

(si osservi che è il campo elettrico generato da N cariche puntiformi di posizioni $\mathbf{y}_i$ e cariche $Q_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, N$).
(a) Calcolare il rotoree la divergenza di del campo.
(b) Calcolare il flusso del campo $\dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|^3}$ uscente da una sfera centrata in $\mathbf{y}_i$.
(c) Utilizzare il Teorema della divergenza per dimostrare che *il flusso uscente da una superficie* Σ *è uguale a* $4\varepsilon\pi Q$*, dove* Q *è la carica totale contenuta entro* Σ (è la legge di Gauss).